高中數學整理

蔡易霖

September 27, 2008

Contents

Part I
高中數學一上

1 數與座標系

1.1 整數

1. Q.判斷n是否爲質數?
   A.檢查小於$\sqrt{n}$的所有質數，如果都不是他的因數，n一定是質數.
2. 輾轉相除法求最大公因數.

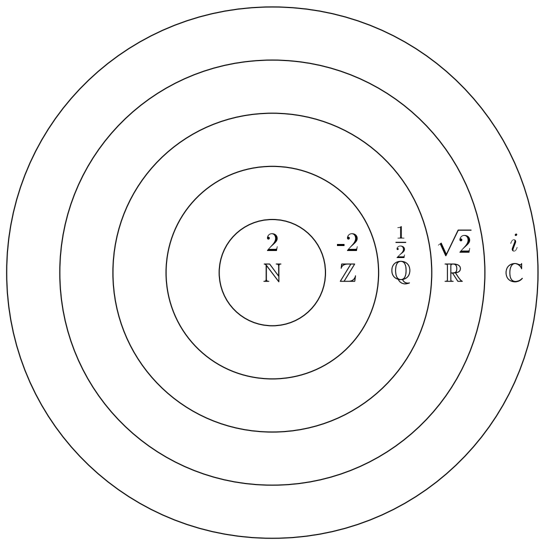
1.2 有理數與實數

若$\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{bd} > 0$

1.3 平面坐標系

1. $\overline{XY}$=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
2. 中點$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
3. $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$
   $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$
   (a) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow$ 恰有一解(相容方程組)
   (b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow$ 無限多解(相依方程組)
   (c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow$ 無解(矛盾方程組)
4. 設直線 L:ax+by+c=0
   (a) 與 L 平行可設 $ax+by+k=0 (k \in \mathbb{R})$
   (b) 與 L 垂直可設 $bx-ay+m=0 (m \in \mathbb{R})$ ($\because$斜率相乘$=-1$)

1.4 複數與複數平面



ℕ:自然數
ℤ:整數
ℚ:有理數
ℝ:實數
ℂ:複數

1.

2. $(a+bi)$、$(a-bi)$兩者互爲彼此的共軛複數，即 $\overline{a+bi}=a-bi.$

3. 運算性質
   (a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
   (b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
   (c) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   (d) $\overline{z^2}=\overline{z}^2$
   (e) $\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

4. $z=a+bi,\ a$、$b\in\mathbb{R},|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

5. 設z、z_1、z_2都是複數
   (a) $z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2$
   (b) $|z|=0\Rightarrow z=0$
   (c) $|-z|=|z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$
   (d) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
   (e) $|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0)$

6. $ax^2+bx+c=0$
   (a) $b^2-4ac>0\Leftrightarrow$兩根爲相異$\mathbb{R}$解
   (b) $b^2-4ac=0\Leftrightarrow$重根

(c) $b^2-4ac<0 \Leftrightarrow$兩根爲共軛複數解

7. $\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-b}{a} \\ \alpha-\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$

8. 複數平面上兩點$P(z_1)$、$Q(z_2)$

   (a) $\overline{PQ}=|z_1-z_2|$
   (pf)
   $\because z_1=x_1+y_1i$
   $z_2=x_2+y_2i$ 時
   $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
   Q.E.D.

   (b) 中點M的坐標$=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$

2 數列與級數

2.1 等差級數與等比級數

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+...+a_n$

2. $\frac{1}{n\cdot(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$

例1: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{97\cdot 99}$(對消法)
$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{7}{3})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{97}-\frac{1}{99})$
$=\frac{49}{99}$

例2: $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$
$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$
$=\frac{n}{n+1}$

3. 等差數列(算術數列)

   (a) $a_n=a_1+(n-1)d$

   (b) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

(c) a_n爲a_{n-1}與a_{n+1}之等差中項(算術中項)
$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

4. 等比數列(幾何數列)

(a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

(b) $S_n = \begin{cases} na & (r = 1) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \end{cases}$

(c) a_n爲a_{n-1}與a_{n+1}之等比中項(幾何平均數)
$\Rightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r} \quad , |r| < 1$ [1]

5. (a) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$
$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$\vdots \qquad\qquad \vdots$(齊次式)
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(b) (只有奇數次)
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^5 - b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$\vdots \qquad\qquad \vdots$(齊次式)
$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$

6. $\sum$ 三大公式

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

7. $\sum$ 的概念

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

[1] 此爲2.2範圍

(c) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

8. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2.2 無窮等比級數與循環小數

1. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$、$\lim_{n\to\infty} b_n = M$

   (a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$

   (b) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M$

   (c) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot L$

   (d) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$

   (e) $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{L}{M} \quad (b_n \neq 0, M \neq 0)$

2. $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}]$

   例: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   $= \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}) + ... + \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

   $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

   $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

   而 $\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{4}$

3. (a) 當公比$r = 1$時，級數發散

   (b) 當公比$r = -1$時，

      i. 有奇數項$\Rightarrow S_n = a_1$

      ii. 有偶數項$\Rightarrow S_n = 0$

      $\Rightarrow$發散

   (c) 當公比$|r| > 1$時，級數發散

   (d) 當公比$|r| < 1$時，級數收斂，且$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

4. 循環小數化分數

例: $12.34\overline{567} = \dfrac{1234567-1234}{99900}$

(pf)

設$x = 12.34\overline{567}$

$$
\begin{array}{lrl}
 & 100000x = & 1234567.\overline{567} \\
-) & 100x = & \quad\;\; 1234.\overline{567} \\
\hline
 & 99900x = & 1234567 - 1234
\end{array}
$$

$\Rightarrow x = \dfrac{1234567-1234}{99900} \quad Q.E.D.$

2.3 數學歸納法

1. 試證: $n \in \mathbb{N},\ A_n = 4 \times 5^{2n} - 2^{3+2}$是17的倍數

   (pf)

   (a) 當$n = 1$時，$A_1 = 100 - 32 = 68$ 是17的倍數

   (b) 設$A_k = 4 \times 5^{2k} - 2^{3k+2}$是17的倍數，則

   $$
   \begin{aligned}
   A_{k+1} &= 4 \times 5^{2(k+1)} - 2^{3(k+1)+2} \\
   &= 4 \times 5^{2k+2} - 2^{3k+5} \\
   &= 100 \times 5^{2k} - 8 \times 2^{3k+2} \\
   &= 8(4 \times 5^{2k} - 2^{3k+2}) + 68 \times 5^{2k} \\
   &= 8A_k + 68 \times 5^{2k} \ \text{ 爲17的倍數}
   \end{aligned}
   $$

   故由數學歸納法知$n \in \mathbb{N}$時永遠成立.

2. $\{\, a_n \,\}$ 的首項是2，對$n \geq 1$，$a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}}$

   試證: 對任意正整數$n \geq 2$，$a_n < 2$.

   (pf)

   (a) 當$n = 2$時，左式$= a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$ 成立.

   (b) 設$n = k$時$(n \geq 2)$，$a_k < 2$ 成立.

   $\Rightarrow$當$n = k+1$時

   $$
   \begin{aligned}
   \text{左式} = a_{k+1} &= \sqrt{2+\sqrt{a_k}} \\
   &< \sqrt{2+\sqrt{2}} \\
   &< \sqrt{2+2} \\
   &= 2 = \text{右式}.
   \end{aligned}
   $$

   故由數學歸納法得$n \geq 2$時$a_n < 2$ 皆成立.

3 多項式

3.1 多項式的四則運算

1. 多項式$P(x)$次數以$\deg P(x)$表示.
   (a) $\deg(3x^2+5x+1)=2$
   (b) $\deg(-y^3+5)=3$
2. 以下並不是多項式
   (a) $\dfrac{2+1}{x^2-1}$
   (b) $\sqrt{x-1}$
   (c) $|x|$
3. $\deg[P(x)Q(x)]=\deg(P(x))+\deg(Q(x))$
4. 綜合除法

   例: $\dfrac{x^5+x^3-4x+3}{x-3}$

   (sol)

   $$\begin{array}{l|l} 1+0+\ 1+\ 0-\ 4+\ 3 & 3 \\ \quad +3+\ 9+30+90+258 & \\ \hline 1+3+10+30+86+,261 & \end{array}$$

   $\Rightarrow x^5+x^3-4x+3=(x-3)(x^4+3x^3+10x^2+30x+86)+261$
5. 將$f(x)=2x^3-x^2+5x-6$表示爲$a(x-5)^3+b(x-5)^2+c(x-5)+d$

   (sol)

   $$\begin{array}{l|l} 2-\ 1+\ 5-\ 6 & 5 \\ \quad +10+45+250 & \\ \hline 2+9+50+,244 \text{ ....d} & \\ \quad +10+95 & \\ \hline 2+19+,145 \text{ ....c} & \\ \quad +10 & \\ \hline \text{a.......}\ 2+,29 \text{ ....b} & \end{array}$$

   $\Rightarrow a=2;\ b=29;\ c=145;\ d=244$

3.2 餘式定理與因式定理

1. 求$\dfrac{x^{101}-x-2}{x-1}$的餘式

   (sol)

   $x^{101}-x-2=(x-1)\cdot Q(x)+r$
   $\Rightarrow 1^{101}-1-2=0\cdot Q(x)+r$
   $\Rightarrow r=-2$

2. 由上例想出餘式定理: $f(x)$除以 $(ax-b)$ 餘式爲$f(\frac{b}{a})$
   (pf)

   設$f(x)=(ax-b)\cdot Q(x)+r$，其中r爲餘式
   把$x=\frac{b}{a}$代入，得$f(\frac{b}{a})=r$ Q.E.D.

3. 因式定理是餘式定理的一個特例:
   $f(x)$有一次因式$ax-b \Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$

4. $f(x)$有$(ax-b)$與$(cx-d)$的因式$\Rightarrow f(x)$有$(ax-b)(cx-d)$的因式.

例1: $f(x)$除以$(x+1)$餘式爲-2，又除$(x-2)$的餘式爲7
求$f(x)$除以$(x+1)(x-2)$的餘式=?
(sol)
設$f(x)=(x+1)(x-2)\cdot Q(x)+(ax+b)$
又$f(-1)=-2, f(2)=7$帶入得
$$\begin{cases}-a+b=-2\\ 2a+b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases} \Leftrightarrow \text{所求爲}3x+1$$

例2: 設$f(x)$是二次多項式，且$f(1)=4=f(2)$，$f(3)=2$，求$f(x)=$?
(sol)
設$f(x)=(x-1)(x-2)\cdot k+4$
又$f(3)=2\cdot 1\cdot k+4=2\Rightarrow k=-1$
故所求爲$-x^2+3x+2$

6. 牛頓一次因式檢驗法:
   設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$是一整數多項式
   若$f(x)$具有一因式$ax-b$，其中$(a,b)=1$，則 $a|a_n$、$b|a_0$

3.3 最高公因式與最低公倍式

1. $[\,f(x), g(x)\,]$表示$f(x)$與$g(x)$的最低公倍式(L.C.M.)
   $(\,f(x), g(x)\,)$表示$f(x)$與$g(x)$的最高公因式(H.C.F.)

2. (a) $[\,f(x), g(x)\,] = \dfrac{f(x) \times g(x)}{(\,f(x), g(x)\,)}$
   (b) $(\,f(x), g(x)\,) | [\,f(x), g(x)\,]$
   (c) 利用$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x) \Rightarrow d(x)|f(x)\cdot m(x) + g(x)\cdot n(x)$
      i. 消除未知係數
      ii. 去頭法
      iii. 去尾法

3. 輾轉相除法:
   $f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$
   則$(\,f(x), g(x)\,) = (\,g(x), r(x)\,)$

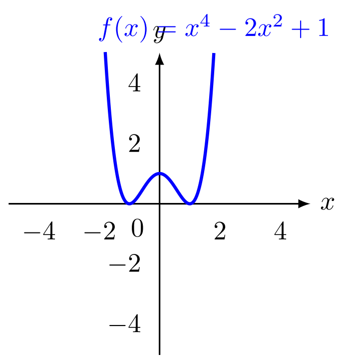
3.4 多項式函數

1. 線性函數$y = f(x) = ax + b$
   (a) 當$a = 0$: 常數函數(水平線)
   (b) 當$a \neq 0$: 一次函數(斜率a之斜線)

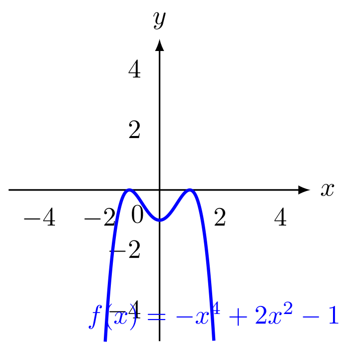
2. $y = ax^2 + bx + c$(一般式)
   $\quad = a(x-h)^2 + k$(頂點式)
   頂點$(h,k) = (\dfrac{-b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a})$

3. 二次函數$y = a(x-h)^2 + k$圖形為:
   將$y = ax^2$向右移動h，向上移動k.
   (a) $a > 0 \Rightarrow$開口向上，有最小值
   (b) $a < 0 \Rightarrow$開口向下，有最大值

4. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e(a \neq 0)$
   (a) $a > 0$

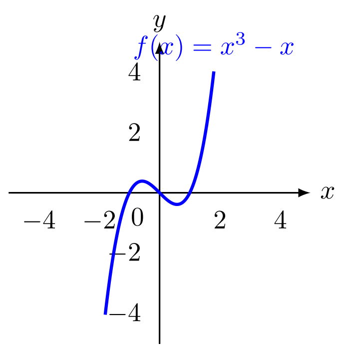


(b) $a<0$

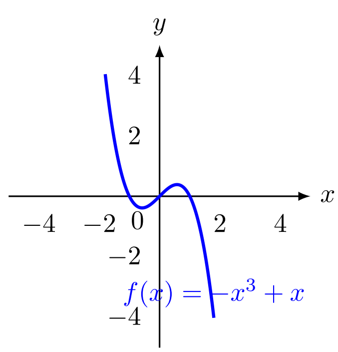


5. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$

   (a) $a>0$



   (b) $a<0$



(不退化情形)

3.5 多項式方程式

1. 任一$n(n\geq 1)$次複係數多項式至少有一複數根
2. 任一$n(n\geq 1)$次多項式方程式，恰好有n個根
3. a^2+bx+c，判別式$D=b^2-4ac$

(a) $D>0$，方程式有兩相異實根

(b) $D=0$，方程式重根

(c) $D<0$，方程式有兩共軛虛根

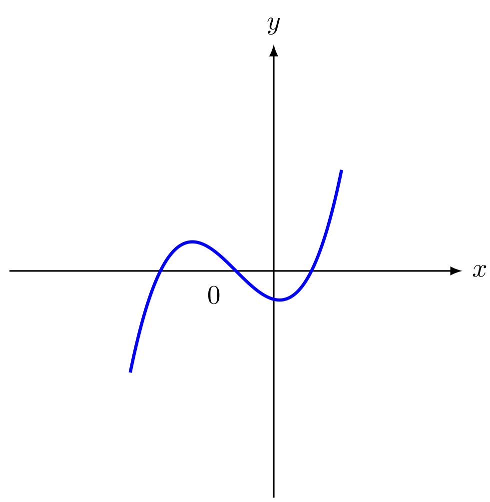
4. $f(x)$是一$n(n\geq 1)$次多項式，且$\alpha=a+bi$為$f(x)$的一根
$\Rightarrow \bar{\alpha}=a-bi$也為一根.

5. 每一實係數n次多項式都可以分解為一次與二次多項式的乘積.

6. 若$\deg(P(x))$為奇數，則$P(x)$有實根.

7. 設α、β、γ為ax^3+bx^2+cx+d的三根
則$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\frac{c}{a}$，$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$

8. 堪根定理 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，$f(a)\cdot f(b)<0$
$\Rightarrow$ 存在奇數個c，$a<c<b$且$f(c)=0$



3.6 多項式不等式

1. 區間

(a) 開區間，用$(-3,8)$表$-3 < x < 8$

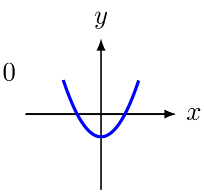
(b) 閉區間，用$[-3,8]$表$-3 \leq x \leq 8$

(c) 半開(閉)區間，用$[-3,8)$表$-3 \leq x < 8$

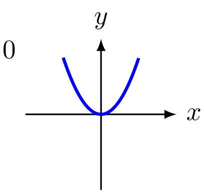
2. $y = ax^2 + bx + c \qquad D = b^2 - 4ac$

(a) 與x軸交點

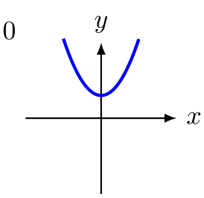
i. 恰有兩個交點，$D > 0$



ii. 恰有一個交點，$D = 0$

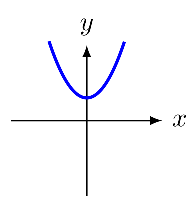


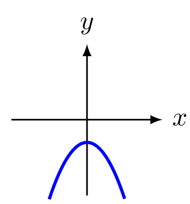
iii. 沒有交點，$D < 0$



(b) y軸恆正與恆負

i. $ax^2 + bx + c$恆爲正$\Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$





ii. $ax^2 + bx + c$恆爲負$\Longleftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$

3. (a) $|k| < 3 \Longleftrightarrow -3 < k < 3$

(b) $|k| > 3 \Longleftrightarrow k > 3$ 或 $k < -3$